ЛЕКЦИЯ

16 февраля 2019 г.

«Логарифмические уравнения с параметром»

- Лицей научно-инженерного профиля
- г. Королёв

- Алгебра 11 класс

- *Учитель математики:*
- Митина Анна Борисовна

• Цель урока:

<u>**Цель урока**:</u>

- Показать функционально-графические методы, которые можно использовать при решении задач с параметрами (на примере логарифмических уравнений).

- Научить правильно выбрать метод, целесообразный для данного уравнения.

«Логарифмические уравнения с параметром»

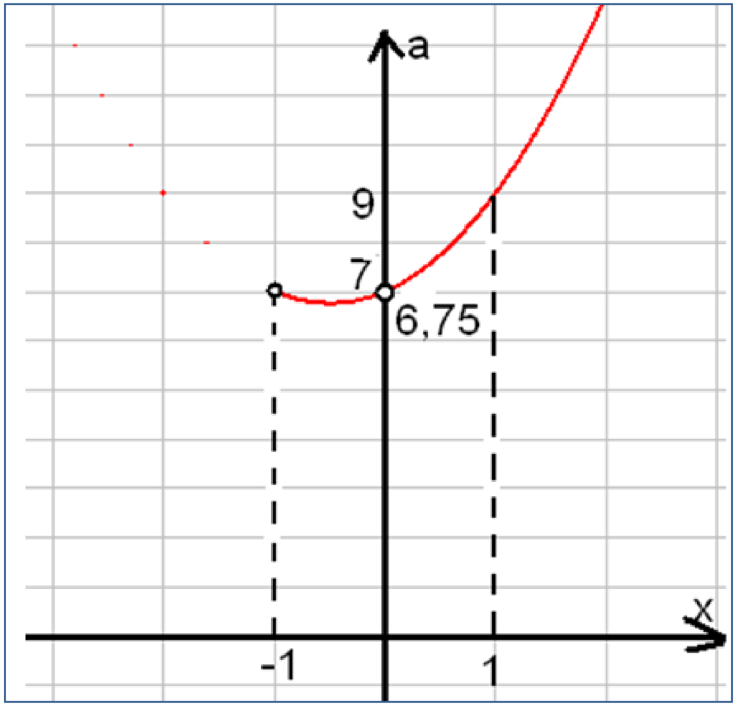
Задача №1(ЕГЭ) (№10)
Найдите все значения а, при которых уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ *имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку* $(-1;1]$.

Решение:

Уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2+x+7-a=0, \\ x>-1, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x)=x^2+x+7 \\ x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases}$$



Построим зависимость *a(x)*,

$a(x)=x^2+x+7,\ x_b=-\frac{1}{2},\ a_b=6\frac{3}{4}$

$a(-1)=7,\qquad a(1)=9$

Ответ: $a\in\left[6\frac{3}{4},7\right)\cup(7,9]$

«Логарифмические уравнения с параметром»

Задача №2(МГТУ) (№17)

При каких значениях параметра система $\begin{cases} y=\log_2\left(5+4\frac{|x-5|}{x-5}-\frac{|x+2|}{x+2}\right), \\ x^2-2x+(y-p)^2=24 \end{cases}$

имеет два различных решения?

Решение: Рассмотрим выражение

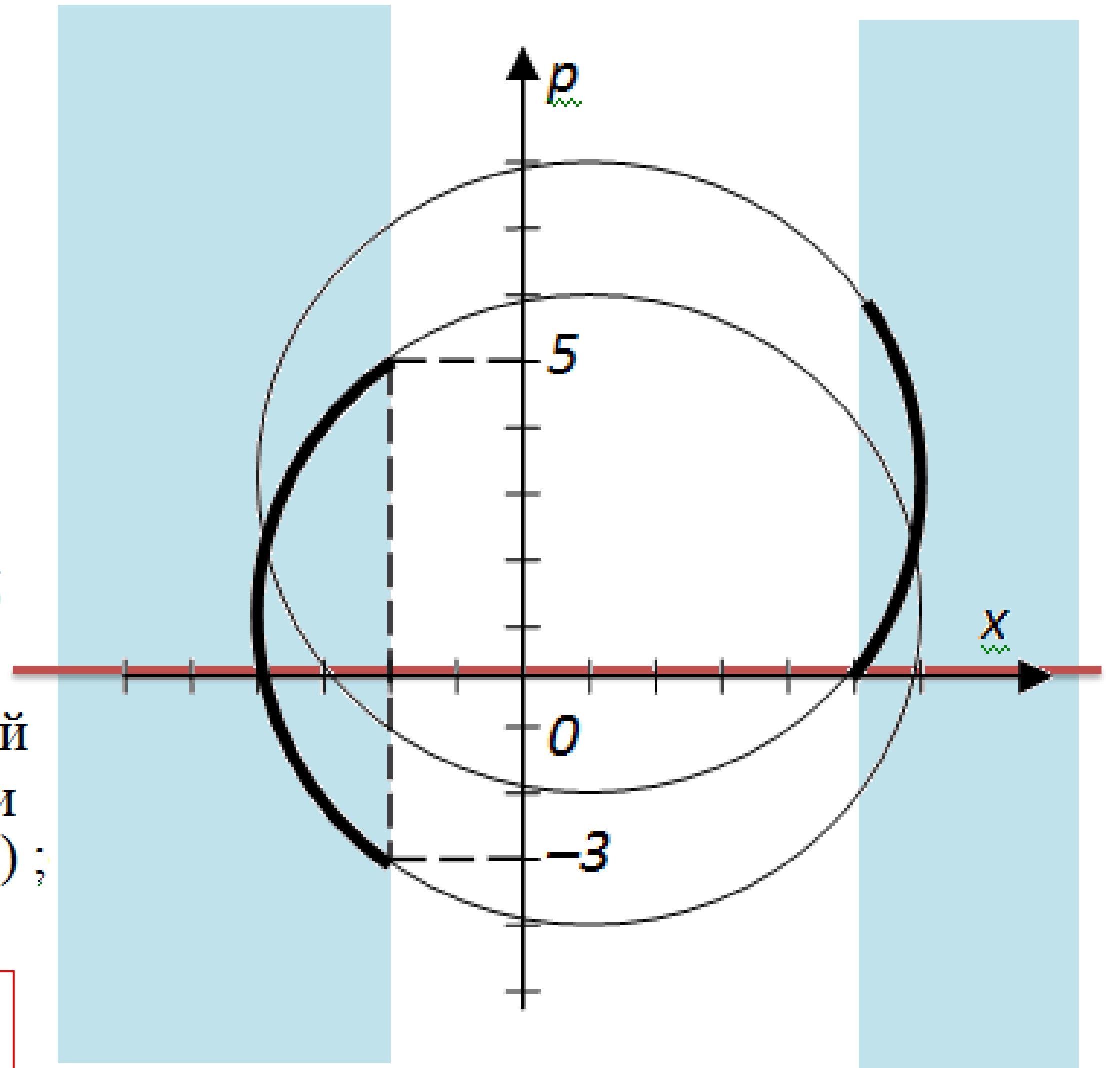
$$A=\left(5+4\frac{|x-5|}{x-5}-\frac{|x+2|}{x+2}\right)$$

$$A=\left[\begin{array}{ll} x<-2; & 2 \\ -2<x<5; & 0 \\ x>5; & 8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2 \\ y=1 \\ (x-1)^2+(p-1)^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} x>5 \\ y=3 \\ (x-1)^2+(p-3)^2=25 \end{cases} \end{array}\right.$$

«Логарифмические уравнения с параметром»

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -2 \\ y = 1 \\ (x-1)^2 + (p-1)^2 = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5 \\ y = 3 \\ (x-1)^2 + (p-3)^2 = 25 \end{cases}\end{array}\right.$$



Графиком этих уравнений являются две окружности с центрами в точках (1;1) ; (1;3) и радиусами 5.

Ответ: $p \in (0;\, 5)$.

«Логарифмические уравнения с параметром»

Задача №3(МГУ) (№2)

Указать все значения a, при которых уравнение

$\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a \cdot |a + \log_a x| = a \cdot \log_x a$ *имеет решения,*

и найти все решения.

Решение: $\log_a x + \dfrac{2|a+\log_a x|}{\log_a x} = \dfrac{a}{\log_a x}$,

$\log_a x \neq 0$, $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\log^2{}_a x + 2|a + \log_a x| = a$, $\log_a x = t$

$t^2 + 2|a + t| = a; 2|a + t| = a - t^2$

$$\begin{cases} a - t^2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2a + 2t = a - t^2 \\ 2a + 2t = -a + t^2 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq t^2 \\ \left[\begin{array}{l} a = -t^2 - 2t \quad (I) \\ a = \frac{1}{3}(t^2 - 2t) \quad (II) \end{array}\right. \end{cases}$$

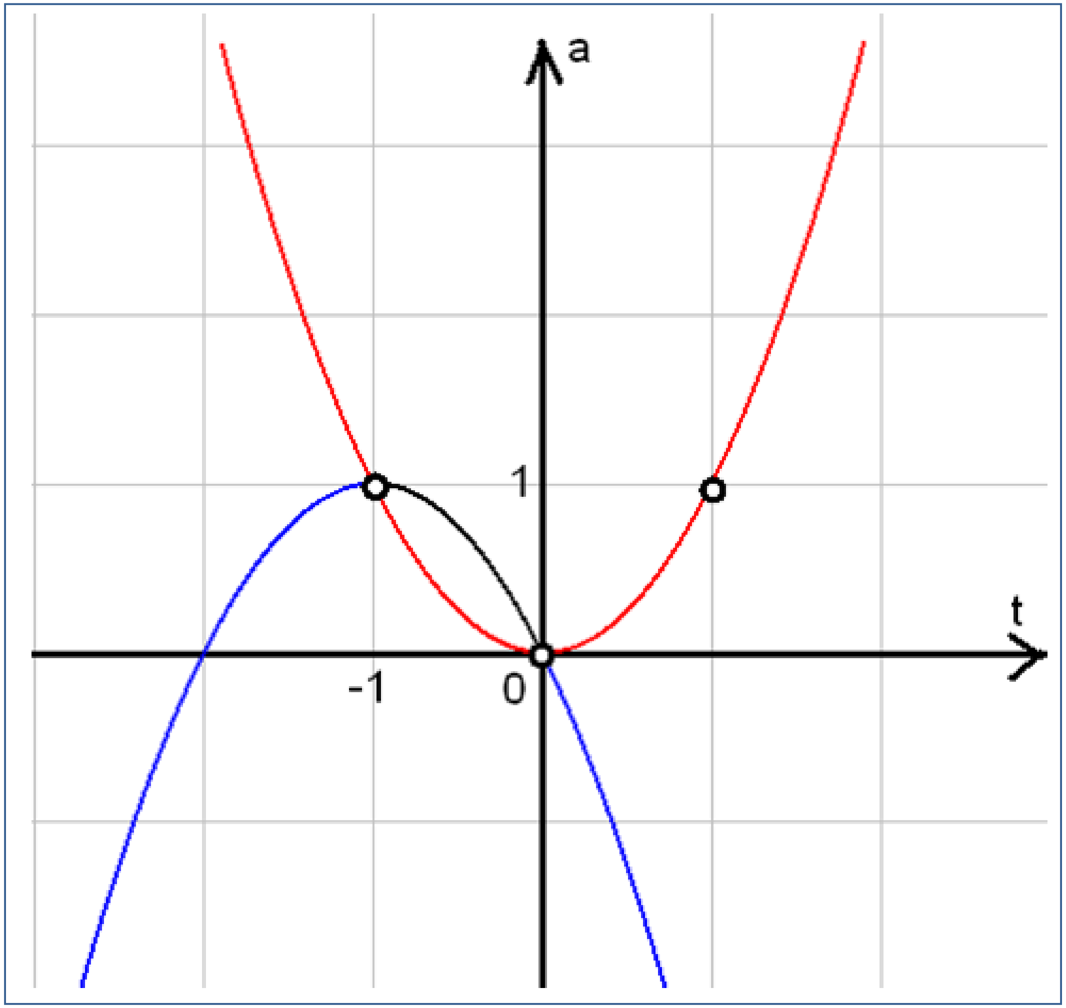
«Логарифмические уравнения с параметром»

Найдём точки пересечения графиков функций:

$$\begin{cases} a \geq t^2 \\ \left[\begin{array}{l} a = -t^2 - 2t \quad (I) \\ a = \frac{1}{3}(t^2 - 2t) \quad (II) \end{array}\right. \end{cases}$$

(I) $t^2 = -t^2 - 2t,$

$(0, 0), (-1, 1)$



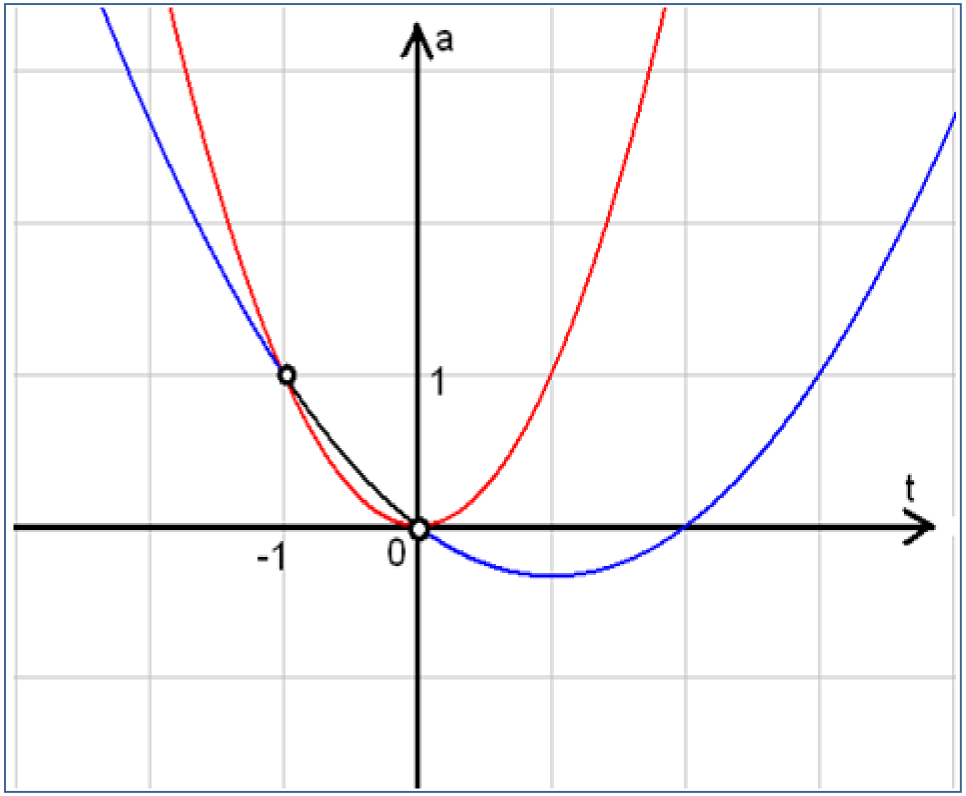
«Логарифмические уравнения с параметром»

Найдём точки пересечения графиков функций:

$$\begin{cases} a \geq t^2 \\ \left[\begin{array}{ll} a = -t^2 - 2t & (I) \\ a = \frac{1}{3}(t^2 - 2t) & (II) \end{array}\right. \end{cases}$$

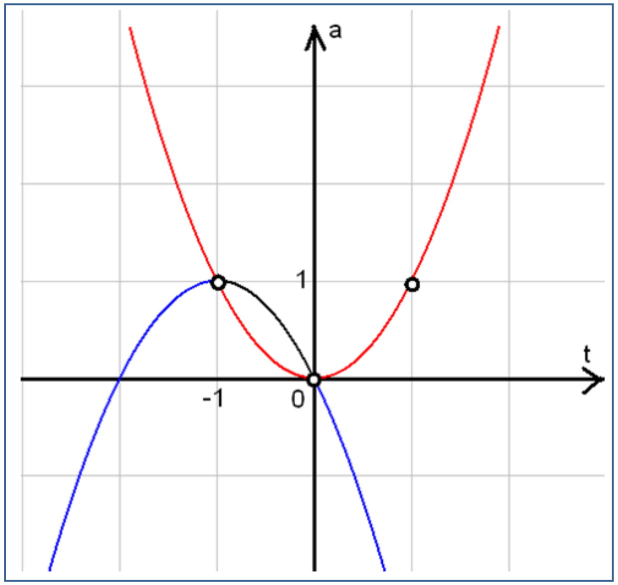
(II) $\quad t^2 = \frac{1}{3}(t^2 - 2t),$

(0,0), (-1,1)



«Логарифмические уравнения с параметром»

$$\begin{cases} a \geq t^2 \\ \left[\begin{array}{l} a = -t^2 - 2t \quad (I) \\ a = \frac{1}{3}(t^2 - 2t) \quad (II) \end{array}\right. \end{cases}$$

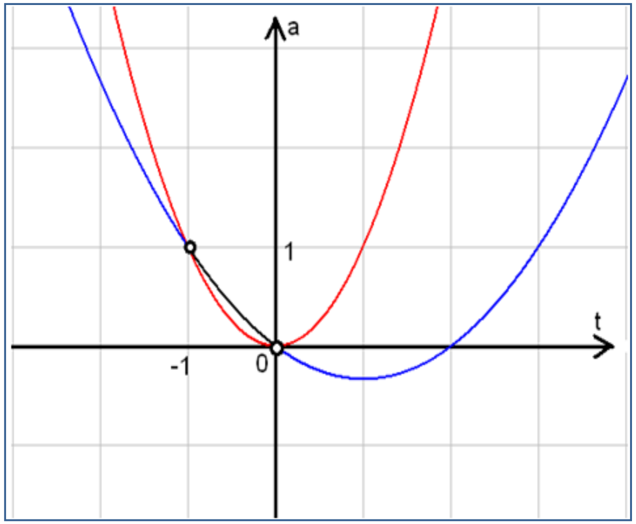


Решим два квадратных уравнения:

1) $t^2 + 2t + a = 0, \quad t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$

2) $t^2 - 2t - 3a = 0, \quad t_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1+3a}$

$$\log_a x = t$$



Ответ: $a \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ решений нет,

$a \in (0,1)$ $x_1 = a^{\sqrt{1-a}-1}, \quad x_2 = a^{1-\sqrt{1+3a}}$

«Логарифмические уравнения с параметром»

Задача №4 (МГУ)(№6)

Решить уравнение при всех значениях параметра. $\dfrac{\lg(ax)}{\lg(x+1)} = 2$

Решение: Уравнение $\dfrac{\lg(ax)}{\lg(x+1)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} ax = (x+1)^2 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Рассмотрим функцию: $a(x) = \frac{x^2+2x+1}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}$

Функция имеет две асимптоты: $y = x + 2,\ x = 0$. Найдём точки экстремума.

$a^I(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$, $x_{max} = -1,\ x_{min} = 1,\ a(-1) = 0, a(1) = 4$

Построим зависимость $a(x)$.

«Логарифмические уравнения с параметром»

$$a(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$$

$x_{max} = -1,$

$x_{min} = 1,$

$a(-1) = 0,$

$a(1) = 4$

$$\boxed{\begin{matrix} x > -1 \\ x \neq 0 \end{matrix}}$$

Ответ:

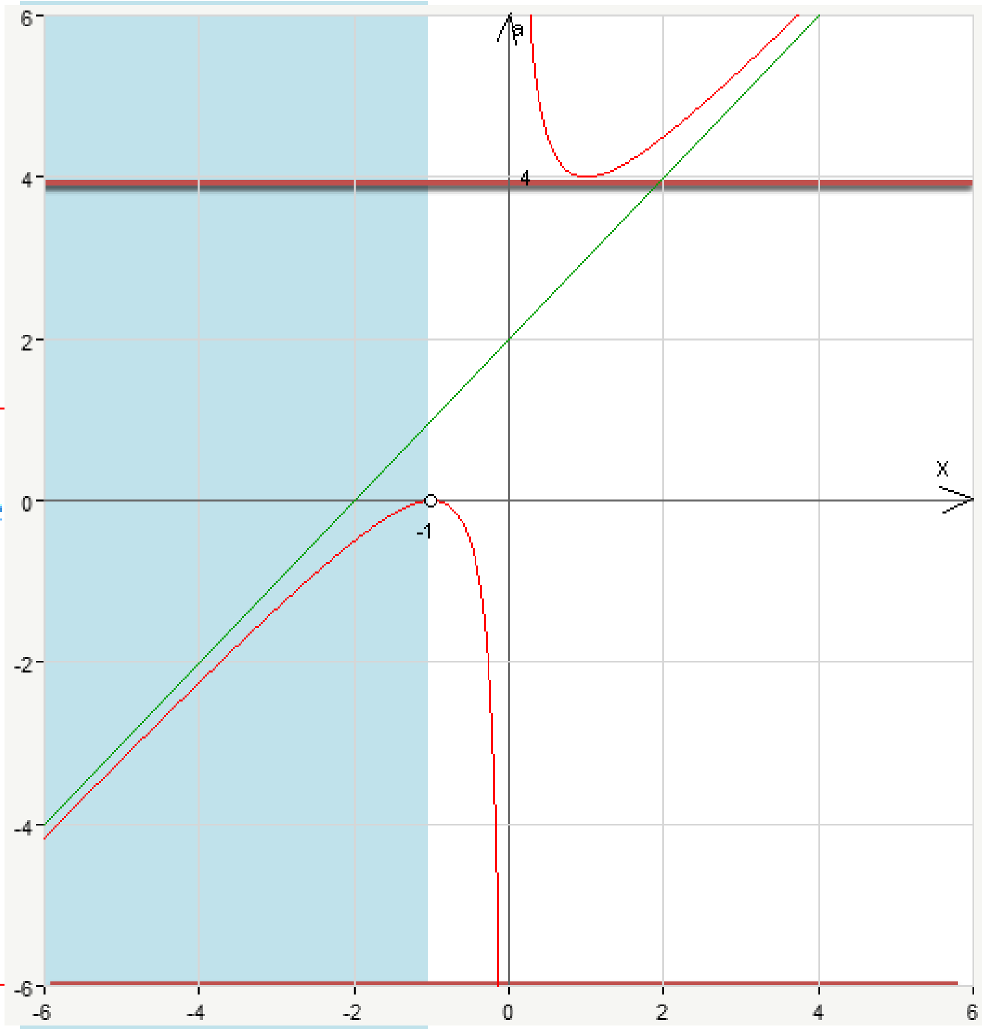
при $a \in (-\infty, 0)$ одно решение

$$x = \frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2},$$

при $a = 4$ $x = 1,$

при $a \in (4, +\infty)$ два решения

$$x_{1,2} = \frac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$$



Спасибо за внимание!!!